PRECISION ENGINEERING – oder kennen Sie TSCHEBYSCHEFF?

Haben Sie sich auch schon gefragt, wie es möglich ist, Baugruppen zu konstruieren, die im Sub-µm-Bereich stabil sind? Wie ist es möglich, den Fehler, der durch die unterschiedliche Temperaturdehnung zweier Bauteile entsteht, zu kompensieren oder gar auszuschalten?

Eine Möglichkeit ist es, die Mechanismen mit Hilfe von Finite-Element-Programmen zu berechnen und zu optimieren. Eine bessere Möglichkeit besteht darin, den Gesamtfreiheitsgrad der Baugruppe mit der von Tschebyscheff angegebenen Formel zu bestimmen und jede Überbestimmtheit zu entfernen.

Maschinen oder Geräte bestehen im Allgemeinen aus vielen Bauteilen, von denen jedes 6 Freiheitsgrade (drei der Translation entlang der Achsen x, y, z und drei der Rotation um die Achsen x, y und z). Kombiniert man die Bauteile zu einer Baugruppe, lässt sich der Gesamtfreiheitsgrad nach Tschebyscheff berechnen. Dabei werden folgende Formelbuchstaben verwendet:

n = Anzahl der Getriebeglieder einschließlich Gestell bzw. Bezugssystem. Glieder sind bewegliche Einheiten und im allgemeinen feste Körper.

g = Zahl der Elemente. Die. Die Gelenke sollen die relativen Bewegungsmöglichkeiten zweier gelenkig verbundener Glieder auf den Gelenkfreiheitsgrad beschränken.

f_j = Gelenkfreiheitsgrad des j-ten Gelenkes.

F = Gesamtfreiheitsgrad des Gerätes. Ist F=0, dann ist das System unbeweglich, und alle Glieder sind zwangsfrei miteinander verbunden. Bei F=1 ist eine einzige Bewegung möglich. Zur Lage eines Gliedes gehören dann eindeutig bestimmte Lagen aller übrigen Glieder. Beispielsweise ein Linearantrieb arbeitet mit F=1, ein zweidimensionaler Antrieb mit F=2. Systeme mit F<0 sind überbestimmt, d.h. sie sind innerlich verspannt. Im allgemeinen Maschinenbau sind solche Systeme aufgrund der Elastizität der einzelnen Gelenkglieder möglich, für Präzisionsgeräte eignen sich solche Anordnungen jedoch nicht.

Jedes Glied kann 6 Einzelbewegungen ausführen. Das Gestell wird als Glied mitgezählt, aber als unbeweglich angesehen. Alle anderen Bewegungen werden relativ zu diesem betrachtet. Es verbleiben n-1 Glieder, die zunächst 6 Bewegungen ausführen können. Der Gesamtfreiheitsgrad des Systems ist, bevor irgendwelche Gelenke Bewegungen einschränken,

$$F = 6 \cdot (n-1) \qquad \text{Formel 1}$$

Werden Glieder durch ein Gelenk mit dem Freiheitsgrad f verbunden, so sind an dieser Verbindungsstelle statt 6 nur noch f Freiheitsgrade vorhanden. Dem Gesamtsystem fehlen demnach (6-f) Freiheitsgrade. Werden g Gelenke mit den Freiheitsgraden f_j eingeführt, dann fehlen insgesamt

$$\sum_{j=1}^{g} (6 - f_j) \qquad \text{Formel 2}$$

Freiheitsgrade. Das Gesamtsystem verfügt nun noch über die folgende Anzahl von Freiheitsgraden:

$$F = 6 \cdot (n-1) - \sum_{j=1}^{g} (6 - f_j) \qquad \text{Formel 3}$$

Die Formel ausmultipliziert und etwas umgestellt ergibt

$$F = 6 \cdot (n-1-g) + \sum_{j=1}^{g} f_j \qquad \text{Formel 4}$$

Das ist die oben erwähnte Strukturformel der Mechanismen, die 1869 von dem russischen Mathematiker Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff angegeben worden ist.

Ein Beispiel soll die Folge der Missachtung des Prinzips der Zwangsfreiheit verdeutlichen:

Zwei Platten seien einseitig eingespannt und links und rechts durch zylinderstifte verbunden. Es wird angenommen, dass die Teile geringfügig unterschiedliche Wärmeausdehnungskoeffizienten haben, was bei Stahl bereits durch unterschiedliche Wärmebehandlung hervorgerufen werden kann. Dann erfolgt eine Deformation des freien Endes Δz wie bei einem Bimetall. Dafür gilt die folgende Formel:

$$\Delta z = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot l^2 \cdot \Delta\vartheta}{2 \cdot t_n} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot l^2 \cdot \Delta\vartheta}{d_1 + d_2} \qquad \text{Formel 5}$$

α_1 = Wärmeausdehnungskoeffizient des ersten Teils

d_1 = Dicke des ersten Teils

α_2 = Wärmeausdehnungskoeffizient des ersten Teils

d_2 = Dicke des zweiten Teils

$\Delta\theta$ = Temperaturdifferenz gegen die Montagetemperatur

t_n = Abstand der neutralen Zonen der Bimetallpartner

l = Abstand der Verbindungsstellen

Δz = Absenkung der Anordnung am freien Ende zufolge der Temperaturänderung

Mit $\alpha_1 = 10{,}5 \times 10^{-6}\ K^{-1}$, $\alpha_2 = 11{,}5 \times 10^{-6}\ K^{-1}$

d_1 = 20 mm, d_2 = 20 mm, l = 300 mm, $\Delta\theta$ = 30 K ergibt sich

$\Delta z = 67{,}5 \times 10^{-3}$ mm = 67,5 µm

$\Delta z/l = 67{,}5 \times 10^{-3}$ mm / 300 mm = $2{,}25 \times 10^{-4}$

Im Sinne der Präzisionsmechanik, die relative Genauigkeiten von 10^{-5} bis 10^{-8} anstrebt, sind derartige Deformationen, wie sie hier auf Überbestimmung beruhen, viel zu gross. Man muss versuchen, eine einwandfreie, d.h. zwangsfreie Verbindung herzustellen.

Wie Sie solche Gelenke gestalten können, finden Sie u.a. im Jenaer Jahrbuch für Technikgeschichte 2011 Band 14 in den Aufsätzen von Armin Schöppach und Manfred Steinbach.

[Inhaltsverzeichnis Band 14]

[Buch auf Amazon kaufen]

[Kontaktieren Sie mich gern], wenn Sie mehr Informationen zu diesem Thema wünschen oder an einer Zusammenarbeit mit mir interessiert sind.